

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
«Донской государственный технический университет»

Утверждено на заседании
кафедры
технической
механики 03.04.2021

Методические указания
Задания и пример выполнения
контрольной работы № 1 по дисциплине
«Теоретическая механика» для
подготовки бакалавров заочной формы
обучения направления 08.03.01
«Строительство»
(210501АДЗПГ_132ПГ_2-20,
b080301АШЗП_150пз_2-20)

Ростов-на-Дону

2021

УДК 624.04

Методические указания для выполнения контрольной работы № 1 по дисциплине «Строительная механика» для подготовки бакалавров заочной формы обучения направления 08.03.01 «Строительство». – Ростов н/Д: ДГТУ, 2021. – 36с.

Разделы 1-5: основные теоретические положения и примеры решения задач.
Раздел 6 - варианты контрольных заданий студентов.

Шифр определяется по трем последним цифрам номера зачетной книжки.
Например, номер зачетки 12345678. Шифр: 678. Тогда первая цифра шифра 6, вторая 7, третья 8.

Составители:

проф., д-р техн. наук. Л.Н.Панасюк,
канд. техн. наук, доц. Д.А.Высоковский,
канд. техн. наук, доц. С.И.Углич

Рецензент: проф, д-р физ.-мат. наук
А.А. Ляпин

Введение

Теоретическая механика – это наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел.

Движение тел происходит в трехмерном евклидовом пространстве и во времени, не зависящем от скорости движения тел.

Для изучения движения тел вводят систему отсчета, состоящую из тела отсчета и системы координат. В механике постулируется существование инерциальной системы, в которой справедливы законы Ньютона.

Метод абстракции или моделирования в механике предполагает переход от реальных тел к различным моделям, представляющим определенную степень абстракции.

Рассмотрим следующие модели:

- **материальная точка** – это материальное тело, различием в движении отдельных точек которого можно пренебречь;
- **абсолютно твердое тело** – это такое тело, расстояние между двумя точками которого остается неизменяемым во время движения;
- **механическая система** – совокупность тел, в которой положение каждого тела зависит от положения всех остальных тел.

Состояние покоя есть частный случай механического движения, поэтому в разделе «статика» теоретическая механика изучает равновесие материальных тел под действием приложенных сил и исследует методы преобразования одних систем сил в другие, им эквивалентные.

1. Основные понятия статики

1.1. **Сила** – количественная мера механического взаимодействия материальных тел, характеризующая интенсивность и направление этого взаимодействия. Сила – величина векторная, характеризуется модулем, точкой приложения и направлением вдоль линии действия (рис. 1).

1.2. **Система сил** – совокупность сил, приложенных к телу (рис. 2)

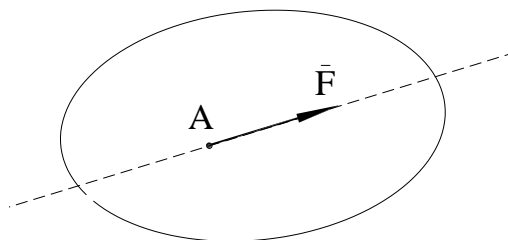


Рис. 1

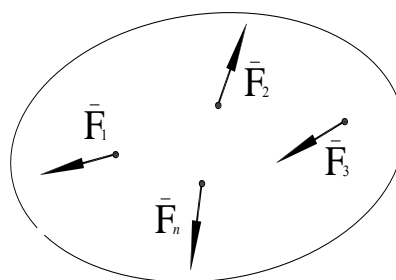


Рис. 2

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}. \quad (1)$$

1.3. **Эквивалентные системы сил** – системы сил, под действием каждой из которых тело находится в одинаковом кинематическом состоянии:

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_n\}. \quad (2)$$

1.4. **Уравновешенная система сил** – система сил, которая, действуя на тело, находящееся в состоянии покоя, не сообщает ему движения:

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \sim 0. \quad (3)$$

1.5. **Равнодействующая системы сил** – сила, эквивалентная системе сил:

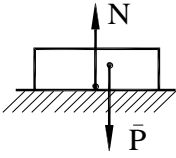
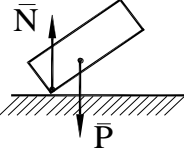
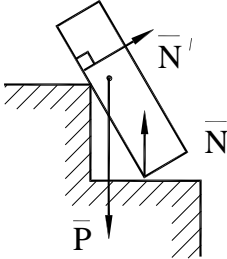
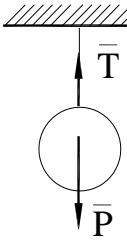
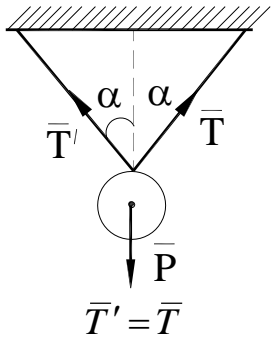
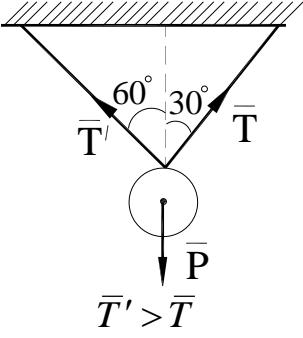
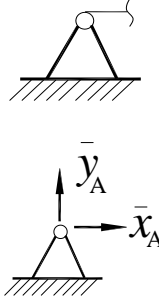
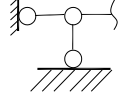
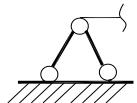
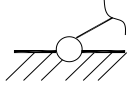
$$\bar{R} \sim \{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}. \quad (4)$$

1.6. **Свободное тело** – тело, перемещения которого ничем не ограничены. В противном случае тело называют несвободным или связанным.

1.7. **Связи** – это тела, ограничивающие перемещения данного тела в пространстве. Внешние связи присоединяют механическую систему к телам, не входящим в систему. Внутренние связи соединяют тела одной системы.

Классификация связей и их реакций приведена в таблице 1.

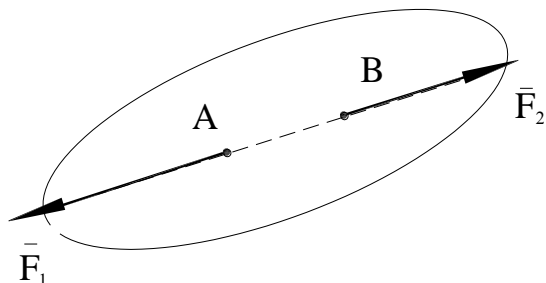
Таблица 1

№	Название связи	Условные обозначения связи на чертежах	Количество и направление реакций
1	2	3	4
1	Гладкая поверхность, плоскость (трением пренебрегаем)	<p>а) </p> <p>б) </p> <p>в) </p>	<p>а) реакция, направленная по нормали к двум соприкасающимся поверхностям б), в) если одна из соприкасающихся поверхностей вырождается в точку, то реакция направлена по нормали к оставшейся поверхности</p>
2	Нерастяжимая нить	 $ \bar{T} = \bar{P} $  	<p>Реакция направлена от груза вдоль нити</p>
3	Шарнирно-неподвижная опора (неподвижный шарнир)	   	<p>Реакция отыскивается в виде двух составляющих, направленных вдоль осей системы координат в произвольную сторону</p>

1	2	3	4
4	Шарнирно-подвижная опора (подвижный шарнир)		Реакция отыскивается в виде одной составляющей, она всегда перпендикулярна поверхности качения, реакция направлена вдоль стержня
5	Двухшарнирный опорный стержень		Реакция направлена вдоль стержня или по линии, соединяющей шарниры
6	Промежуточный шарнир (в плоскости)		Реакция отыскивается в виде четырех попарно разнонаправленных составляющих реакций. Направление первых двух составляющих выбирают произвольно
7	Жесткая заделка		Реакция отыскивается в виде трех составляющих: двух векторов \bar{x} , \bar{y} и изгибающего момента \bar{M}

2. Аксиомы статики

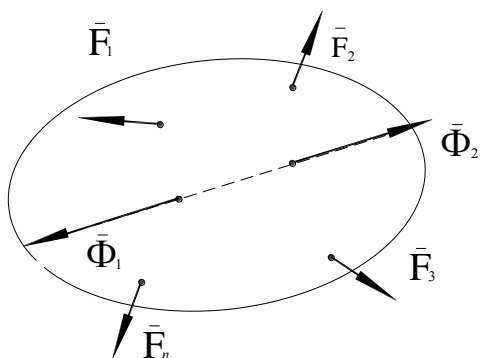
2.1. Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, образуют уравновешенную систему тогда и только тогда, когда они равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 3).



$$\begin{aligned} \{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} &\approx 0, \\ |\vec{F}_1| &= |\vec{F}_2|, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Рис. 3

2.2. Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не нарушится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил (рис. 4).



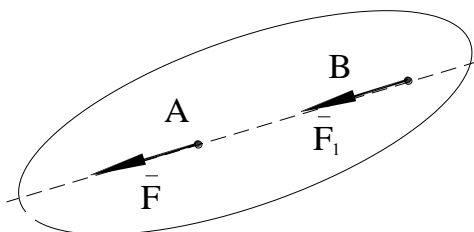
Если $\{\vec{O}_1, \vec{O}_2\} \approx 0$, то

$$\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{O}_1, \vec{O}_2\} \approx \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}. \quad (6)$$

Рис. 4

Следствие

Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно переносить в любую точку на линии ее действия (рис. 5).



$$\vec{F}_1 \approx \vec{F} \quad (7)$$

Рис. 5

2.3. Две силы, приложенные к одной точке тела, приводятся к равнодействующей, которая равна их геометрической сумме и проходит через ту же точку (рис. 6).

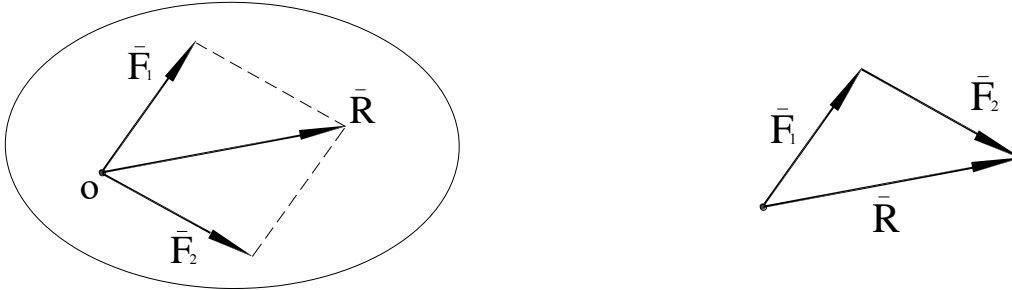
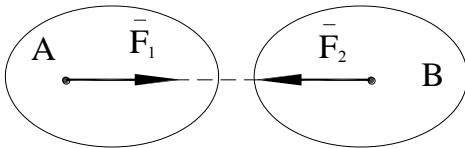


Рис. 6

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\} \sim \bar{R}; \quad \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \quad (8)$$

2.4. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными по одной прямой в противоположные стороны (рис. 7).

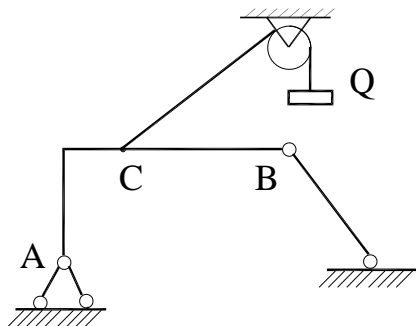


$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, но $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\} \not\sim 0$, т.к. тела не образуют механическую систему.

Рис. 7

2.5. Всякое несвободное тело (8, а) можно считать свободным, если отбросить связи, заменив их действие соответствующими реакциями (рис. 8, б) (принцип освобождения).

а)



б)

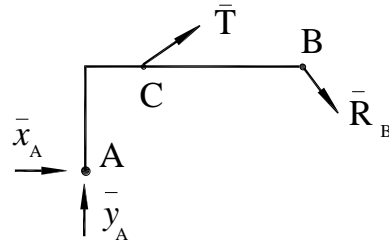


Рис. 8

2.6. Равновесие системы не нарушится от наложения дополнительных связей (принцип отвердения).

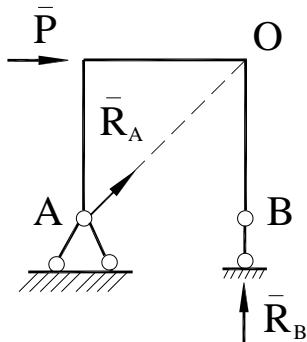
3. Теорема о трех непараллельных силах

Если под действием трех сил тело находится в равновесии и линии действия двух сил пересекаются, то все силы лежат в одной плоскости и их линии действия пересекаются в одной точке. Используя эту теорему, можно определить направление неизвестных реакций связей.

Пример. Определить направление реакции шарнирно неподвижной опоры A (рис. 9).

На рис. 9 (а, б) линия действия реакции шарнира A проходит через точку O , в которой пересекаются силы \bar{P} и известная реакция \bar{R}_B .

а)



б)

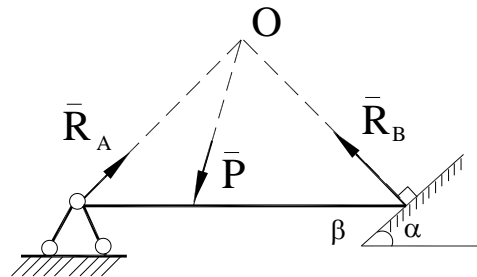


Рис. 9

4. Произвольная плоская система сил

4.1. Момент силы относительно центра

Под действием силы \bar{F} тело может, как поступательно перемещаться, так и совершать вращение вокруг некоторого центра. Вращательный эффект силы характеризуется ее моментом относительно этого центра (рис. 10, 11).

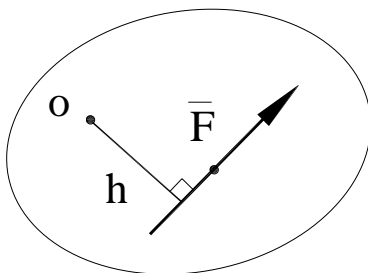
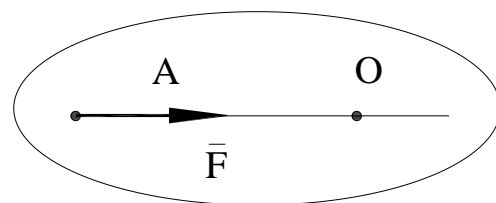


Рис. 10



$$m_o(\bar{F}) = 0$$

Рис. 11

Момент силы \bar{F} относительно центра (точки) O равен произведению модуля силы на ее плечо h относительно этого центра, что соответствует длине перпендикуляра из точки на линию действия силы.

$$m_o(\bar{F}) = \pm |\bar{F}| \cdot h \quad (9)$$

Условимся считать момент положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки.

Отметим свойства момента силы относительно точки:

- момент силы относительно точки не меняется при переносе силы вдоль линии действия;
- момент силы относительно точки равен нулю, когда линия действия силы проходит через моментную точку (см. рис. 11);
- если силу \bar{F} разложить на составляющие вдоль осей координат, то момент силы относительно точки равен алгебраической сумме моментов составляющих той же точки (частный случай теоремы Вариньона о моменте равнодействующей) (рис. 12)

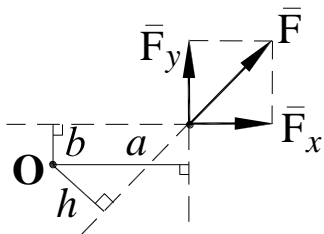


Рис. 12

$$m_o(\bar{F}) = F \cdot h,$$

или

$$m_o(\bar{F}) = m_o(\bar{F}_x) + m_o(\bar{F}_y);$$

$$m_o(\bar{F}) = F_y \cdot a - F_x \cdot b. \quad (10)$$

4.2. Теория пар на плоскости

Парой сил (\bar{F} , \bar{F}') называется система двух равных по модулю, параллельных и разнонаправленных сил (рис. 13):

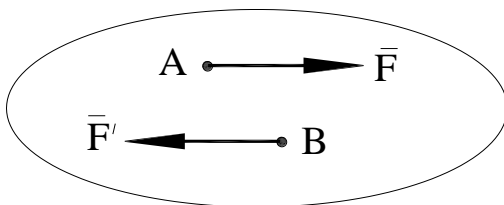


Рис. 13

$$|\bar{F}| = |\bar{F}'|;$$

$$\bar{F} = -\bar{F}'.$$

Наряду с силой, пара сил является мерой механического взаимодействия тел.

Пара сил не является уравновешенной и не имеет равнодействующей. Действие пары сил сводится к вращательному эффекту, который характеризуется алгебраическим моментом пары $m(\bar{F}, \bar{F}')$.

Алгебраический момент пары – это взятое со знаком «+» или «-» произведение модуля одной силы пары на ее плечо.

Плечо пары – кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары:

$$m(\bar{F}, \bar{F}') = F \cdot d. \quad (11)$$

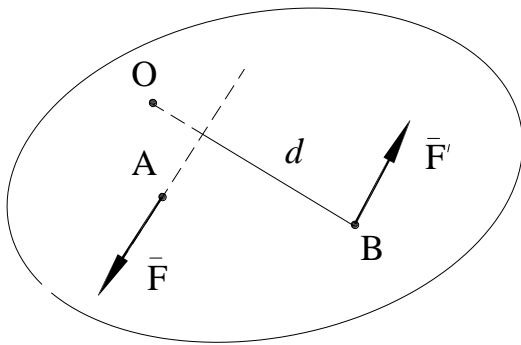


Рис. 14

Из рис. 14 видно, что алгебраический момент пары равен алгебраическому моменту одной силы этой пары относительно точки приложения другой силы:

$$m(\bar{F}, \bar{F}') = m_A(\bar{F}') = m_B(\bar{F}). \quad (12)$$

Свойства пары сил определяются следующими теоремами.

4.2.1. Сумма алгебраических моментов сил пары относительно любого центра не зависит от выбора этого центра и всегда равна алгебраическому моменту пары:

$$m_O(\bar{F}) + m_O(\bar{F}') = m(\bar{F}, \bar{F}'). \quad (13)$$

4.2.2. Действие пары сил на твердое тело не изменится, если пару сил заменить другой парой, лежащей в этой же плоскости и имеющей одинаковый с первой парой алгебраический момент. Следовательно, у пары сил можно произвольно менять модули сил или длину плеча, сохраняя значение алгебраического момента пары.

Пару сил можно переносить куда угодно в плоскости ее действия.

Две пары эквиваленты, когда они имеют одинаковые алгебраические моменты. Чтобы задать пару сил, достаточно задать ее момент. Поэтому пару сил часто изображают кривой стрелкой, указывающей направление поворота (рис. 15).

4.2.3. Сложение пар в плоскости. Система пар, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одной паре, лежащей в этой же плоскости и имеющей момент, равный сумме алгебраических моментов составляющих пар (рис. 16).

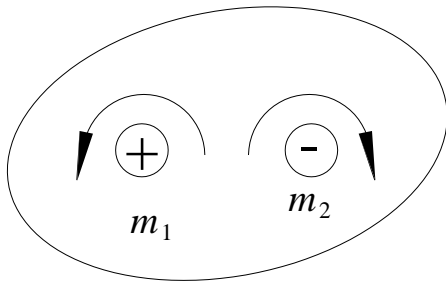


Рис. 15

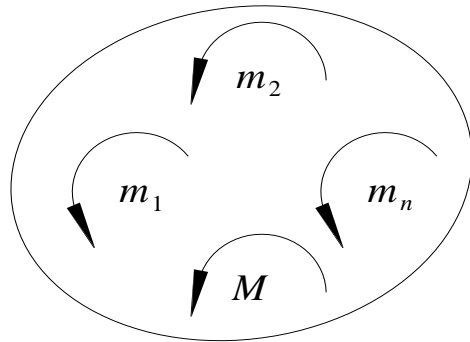


Рис. 16

$$\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \sim M; \quad M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (14)$$

4.3. Приведение плоской системы сил к данному центру

4.3.1. Лемма о параллельном переносе силы

Силу, приложенную к твердому телу, можно переносить из точки ее приложения параллельно самой себе в любую другую точку плоскости, добавляя при этом пару сил, алгебраический момент которой равен алгебраическому моменту переносимой силы относительно новой точки приложения (рис. 17).

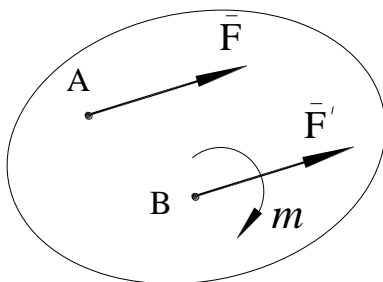


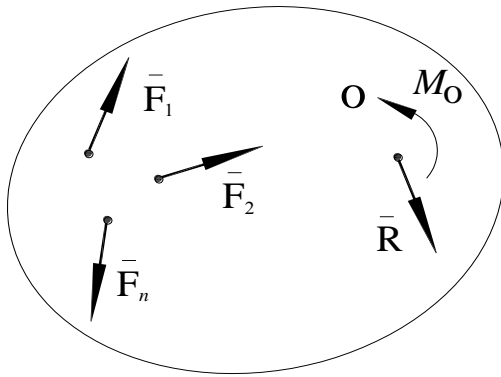
Рис. 17

$$\bar{F} \sim \{\bar{F}', m\}, \quad (15)$$

$$\text{где } m = m_B(\bar{F}).$$

4.3.2. Приведение системы сил к силе и паре сил

Всякая плоская система сил, действующих на твердое тело, эквивалентна одной силе \bar{R} , равной главному вектору системы сил и приложенной в центре приведения O , и одной паре сил с моментом M_O , равным главному моменту системы сил относительно центра O (рис. 18).



$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \sim \{\bar{R}, M_O\}. \quad (16)$$

Рис. 18

Главный вектор системы сил равен геометрической сумме всех сил:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (17)$$

Главный момент системы сил относительно центра O равен сумме моментов всех сил относительно этого центра:

$$M_O = \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k). \quad (18)$$

4.3.3. Приведение плоской системы сил к простейшему виду

1. Если $\bar{R} = 0$, $M_O \neq 0$, то система сил приводится к паре сил с моментом M , не зависящим от выбора центра приведения.

2. Если $\bar{R} \neq 0$, $M_O = 0$, то система сил приводится к равнодействующей равной \bar{R} и приложенной в центре приведения.

3. Если $\bar{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$, то система сил приводится к равнодействующей, равной \bar{R} и приложенной в точке O_1 , отстоящей от центра приведения на расстоянии $OO_1 = h = M_O / \bar{R}$, причем $m_{O_1}(\bar{R}) = M_O$.

4.3.4. Аналитическое представление главного вектора плоской системы сил.

Главный вектор плоской системы сил можно разложить на составляющие, тогда

$$|\bar{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (19)$$

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad (20)$$

где F_{kx} , F_{ky} – проекции силы F_k на оси x , y .

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси (рис. 19).

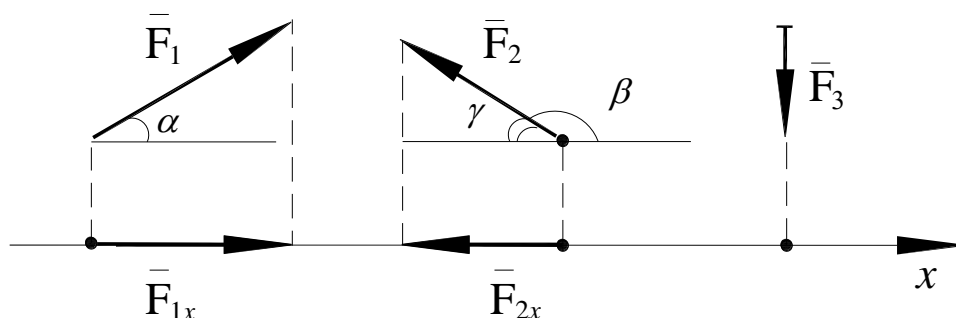


Рис. 19

$$F_{1x} = |\bar{F}_1| \cdot \cos \alpha; \quad (21)$$

$$F_{2x} = |\bar{F}_2| \cdot \cos \beta = -|\bar{F}_2| \cos \gamma; \quad (22)$$

$$F_{3x} = |\bar{F}_3| \cdot \cos 90^\circ = 0. \quad (23)$$

Проекция силы на ось положительна, если сила и ось направлены в одну сторону, и равна нулю, если сила перпендикулярна оси.

4.4. Равновесие произвольной плоской системы сил

Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы и главный момент относительно любого центра одновременно были равны нулю:

$$\bar{R} = 0; \quad \bar{M}_O = 0. \quad (24)$$

Вытекающие отсюда аналитические условия равновесия плоской системы сил можно получить в трех различных формах.

1. Основная форма:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum m_O(\bar{F}_k) &= 0,\end{aligned}\tag{25}$$

где O – любая точка в плоскости действия сил.

2. Вторая форма:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum F_{kx} = 0,\tag{26}$$

где A, B – любые центры в плоскости действия сил; ось Ox не перпендикулярна прямой AB .

3. Третья форма:

$$\begin{aligned}\sum m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) &= 0,\end{aligned}\tag{27}$$

где A, B, C – любые точки плоскости действия сил, не лежащих на одной прямой.

В частном случае, если все силы плоской системы параллельны, то условия равновесия таких сил выражаются не тремя, а двумя уравнениями:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_O(\bar{F}_k) = 0,\tag{28}$$

причем ось Ox параллельна силам (рис. 20).

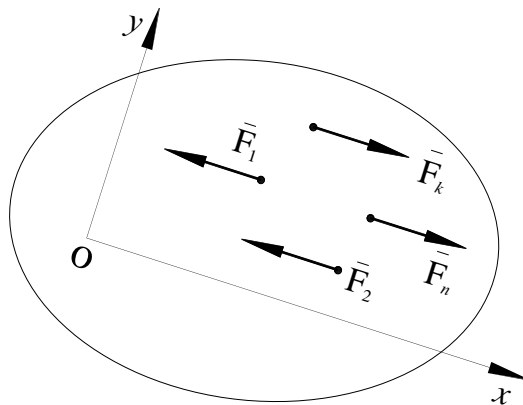


Рис. 20

Другая форма условий равновесия для параллельных сил из равенства (27), имеет вид:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad (29)$$

где A, B – точки плоскости не должны лежать на прямой, параллельной силам.

Если на тело действуют плоская система сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ и система пар с моментами m_1, m_2, \dots, m_n , то при составлении уравнений равновесия в проекциях пары не войдут, т.к. сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

В уравнениях моментов к моментам сил алгебраически прибавляются моменты пар, т.к. сумма моментов сил пары относительно любого центра равна моменту пары.

В этом случае аналитические уравнения равновесия примут вид:

$$1. \sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0. \quad (30)$$

$$2. \sum m_A(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0, \quad \sum m_B(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0, \quad \sum F_{kx} = 0. \quad (31)$$

$$3. \sum m_A(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0, \\ \sum m_B(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0, \\ \sum m_C(\bar{F}_k) + \sum m_i = 0. \quad (32)$$

4.5. Распределенные силы

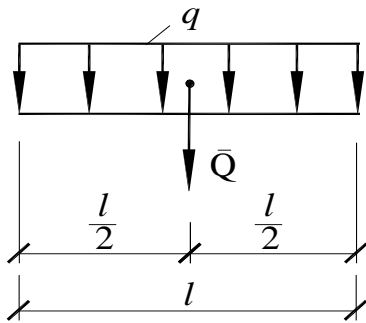
Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью, т.е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного участка, $q = [H / \text{м}]$. Примером такого воздействия может служить нагрузка от собственного веса конструкций, снеговая, ветровая нагрузки, силы давления грунта на подпорную стену, воды на плотину, на боковые стенки трубопровода и т.д.

При статических расчетах равномерно-распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей \bar{Q} , проходящей через середину линии действия (рис. 21, а).

Модуль равнодействующей равен произведению интенсивности нагрузки на линию действия:

$$Q = q \cdot \ell. \quad (33)$$

а



б

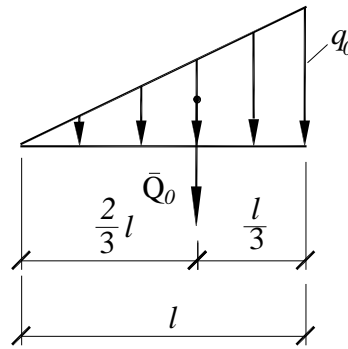


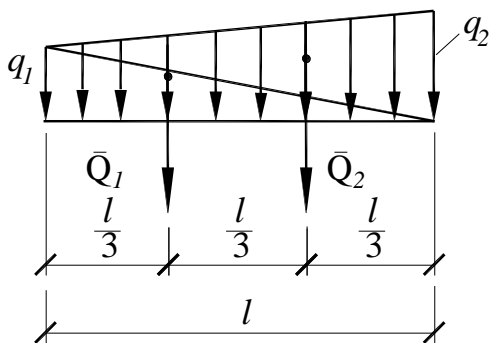
Рис. 21

Если распределенная нагрузка меняется по линейному закону от нуля до максимального значения q_0 , равнодействующая проходит через центр тяжести треугольника (рис. 21, б) и по модулю равна:

$$Q = \frac{1}{2} q_0 \cdot \ell. \quad (34)$$

Если очертание нагрузки соответствует трапеции, то любой диагональю делят на два треугольника и получают две равнодействующие (34) (рис. 22, а). Либо выделяют прямоугольник и треугольник (рис. 22, б), тогда равнодействующие определяют по (33, 34) $Q_1 = q_1 \cdot \ell$; $Q_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_1) \cdot \ell$.

а



б

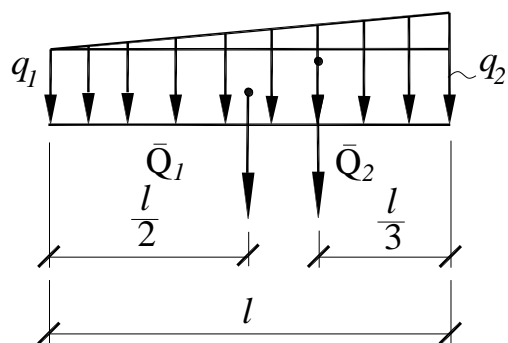


Рис. 22

4.6. Схема решения задач статики

В статике при решении задач рекомендуется следовать схеме:

1. Выявить объект (тело, точку), равновесие которого следует рассматривать.
2. Определить связи (опоры), непосредственно наложенные на тело и освободить тело от связей, заменив их действие реакциями.
3. Выявив число неизвестных в задаче, установить её статическую определимость.
4. Выбрать оси координат и составить уравнения равновесия тела под действием всех сил.
5. Решить эти уравнения относительно тех неизвестных, которые требуется определить.
6. Сделать проверку, составив дополнительные независимые уравнения.

Пример: Определить реакций опор балки. Балка АВ концом А заделана в стену, нагружена силой $F = 20$ кН, равномерно распределенной нагрузкой постоянной интенсивности $q = 3$ кН/м и моментом $M = 5$ кН · м, (рис. 23).

Пренебрегая весом балки, определить реакции опоры А (жесткой заделки).

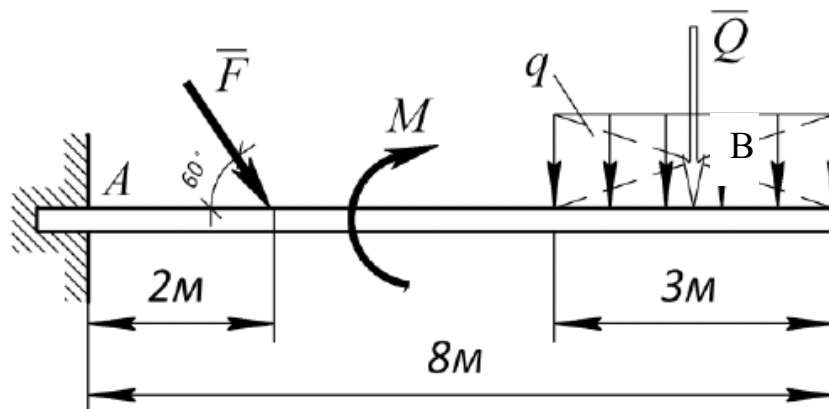


Рис. 23

1. Согласно схеме решения задач статики определяем, что для нахождения неизвестных реакций необходимо рассмотреть равновесие балки
2. На балку наложена связь в точке А типа жесткая заделка, поэтому освобождаем балку, заменив действие связи реакциями (x_A, y_A, M_A).

Непрерывно распределенную нагрузку q , заменяем единой сосредоточенной силой Q , которая приложена посередине участка нагружения и имеет направление нагрузки q , величина силы $Q=3q=9$ кН.

3. В результате имеем свободное равновесие балки под действием плоской системы сил, в которой неизвестными являются реакции x_A, y_A, M_A
4. Выберем систему координат как указано на рис. 24. Составим уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0: x_A + F \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0: y_A - F \sin 60^\circ - Q = 0$$

$$\sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0: M_A - M - F \sin 60^\circ \cdot 2 - Q \cdot 6,5 = 0$$

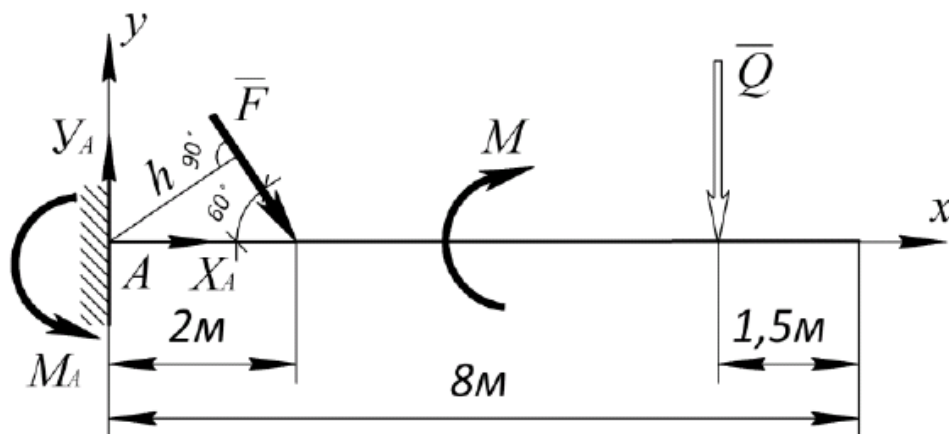


Рис. 24

5. Решаем полученную систему уравнений, находим неизвестные: $x_A=10$ кН, $y_A=26,3$ кН, $M_A=98$ кН·м
6. Сделаем проверку, составив дополнительное моментное уравнение относительно свободного конца балки В:

$$\sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0: M_A - M - y_A \cdot 8 + F \sin 60^\circ \cdot 6 + Q \cdot 1,5 = 0$$

Подставим в полученное уравнение найденные в п. 5 значения:

$98 - 5 - 26,3 \cdot 8 + 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 6 + 9 \cdot 1,5 = 0$, в результате получаем $0 \approx 0$, это означает, что задача решена верно!

4.7. Равновесие конструкции

Задачи статики могут сводиться к рассмотрению равновесия конструкции из системы тел, соединенных какими-либо связями (как правило, используется шарнирное закрепление, либо опирание одного тела на другое). Связи, соединяющие части данной конструкции, называют внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию.

На рис. 25 представлена конструкция, которая состоит из двух тел (треугольников), скрепленных между собой шарниром C (внутренняя связь) и закреплены в точках A и B (внешние связи). Если мысленно отбросить неподвижные шарнирные опоры A и B (внешние связи), то конструкция не будет жесткой, поскольку треугольники могут поворачиваться вокруг шарнира C .

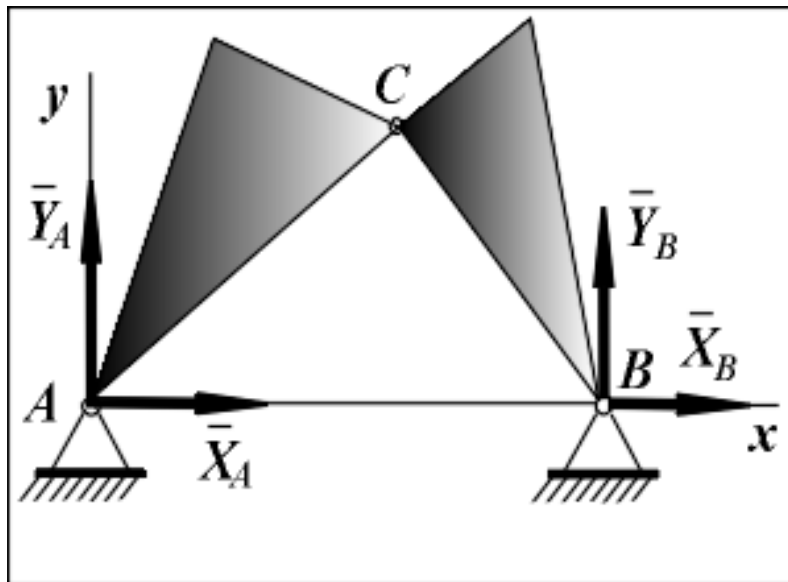


Рис.25

Система сил, действующих на такую конструкцию, должна при равновесии удовлетворять условиям равновесия твердого тела. Но эти условия, являясь необходимыми, не будут достаточными. Из них нельзя определить все неизвестные величины и для решения задачи необходимо дополнительно рассмотреть равновесие какой-нибудь одной или нескольких частей конструкции.

Например, составляя условия равновесия для сил, действующих на всю данную конструкцию (на рисунке активные силы, действующие на нее, не показаны) получаем три уравнения равновесия с четырьмя неизвестными

X_A, Y_A, X_B, Y_B . Рассмотрев дополнительно условия равновесия левого (или правого) треугольника, получаем еще три уравнения, содержащие две новых неизвестных X_C, Y_C - проекции реакции шарнира С (на рисунке не показаны). Решая полученную систему шести уравнений, можно найти все шесть неизвестных.

Другой способ решения подобных задач состоит в том, что конструкцию сразу разделяют на отдельные твердые тела и составляют уравнения равновесия каждого из тел в отдельности. При этом реакции внутренних связей будут попарно равны по модулю и противоположны по направлению. Для конструкции из N тел, на каждое из которых действует произвольная плоская система сил, получится таким образом $3N$ уравнений, позволяющих найти $3N$ неизвестных (при других системах сил число уравнений соответственно изменится).

Если для конструкции число всех реакций внешних и внутренних связей будет больше числа уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция будет статически неопределимой.

5. Расчет плоских ферм

Фермой называется конструкция из прямолинейных стержней, соединенных в узлах шарнирами. Если стержни фермы лежат в одной плоскости, то ферму называют плоской. Все внешние нагрузки прикладывают только в узлах. Таким образом, стержни фермы работают на растяжение или сжатие.

5.1. Классификация стержней фермы

Различают стержни *верхнего пояса* (верхние горизонтальные стержни). Стержни *нижнего пояса* (нижние горизонтальные стержни); *стойки* (вертикальные стержни) *раскосы* (наклонные стержни). Раскосы и стойки образуют *решетку фермы*. Часть фермы между соседними стойками называют *панелью*. На рис. 26 показана ферма с шестью панелями. В статически определимых фермах, т.е. без лишних стержней, число стержней C_δ , число опорных стержней C_{on} и число узлов U связаны соотношением

$$\tilde{N}_\delta + C_{\bar{n}} - 2O = 0, \quad (35)$$

что соответствует стержневой системе, образованной жесткими треугольниками.

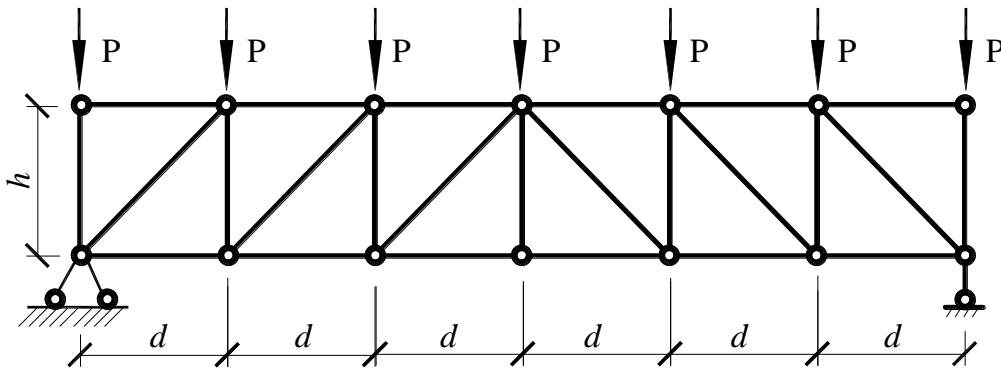


Рис. 26

5.2. Определение усилий в стержнях фермы

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции вычисляют обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело. Усилия в стержнях фермы определяют различными методами.

5.2.1. Метод сечений (метод Риттера)

Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных стержнях фермы. Идея метода состоит в том, что ферму разрезают на две части сечением, проходящим через три стержня, в одном из которых требуется определить усилие, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют усилиями, направляя их вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считая стержни растянутыми. Находят так называемую моментную точку или точку Риттера на пересечении линий действия усилий тех стержней, продольные усилия в которых не определяют на данном этапе. Составляют уравнения равновесия вида $\sum m_k = 0$, где k – точка Риттера. Таким образом, в каждое уравнение войдет только одно неизвестное усилие.

В том случае, когда моментная точка отсутствует, составляют уравнения равновесия $\sum F_{kx} = 0$ или $\sum F_{ky} = 0$.

5.2.2. Метод вырезания узлов

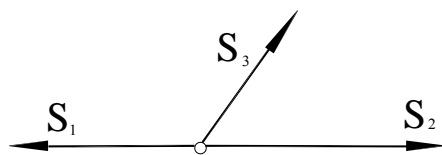
Этот метод является частным случаем метода сечений. При его использовании отсекают узел фермы и рассматривают условия равновесия сил, сходящихся в узле: $\sum F_{kx} = 0$; $\sum F_{ky} = 0$.

Начинают с узла, где сходятся два стержня, т.к. из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия. Далее последовательно рассматривают равновесие узлов, в которых осталось не более двух неизвестных усилий. Усилия в стержнях фермы направляют от узлов, считая все стержни растянутыми. Если в результате расчета значение усилия в каком-нибудь стержне получится отрицательным, это будет означать, что данный стержень сжат.

5.2.3. Леммы о нулевых стержнях:

- если в узле фермы, не нагруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, а два других усилия одинаковые (рис. 27, а);
- если узел состоит из двух стержней без внешнего воздействия, то усилия в этих стержнях нулевые (рис. 27, б).

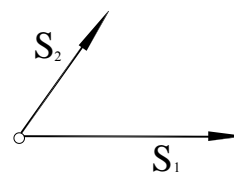
а



$$S_3 = 0;$$

$$S_1 = S_2;$$

б



$$S_1 = 0;$$

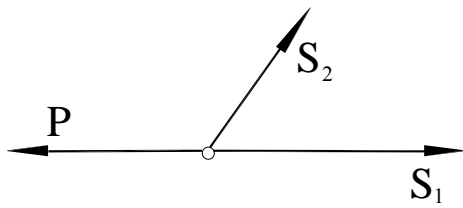
$$S_2 = 0.$$

Рис. 27

Частные случаи лемм:

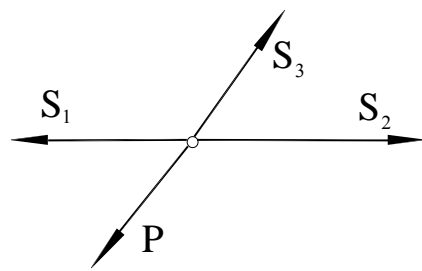
- если в узле сходятся два стержня и вдоль одного из них действует внешняя сила, то усилие в этом стержне равно силе, а другой стержень – нулевой (рис. 28, а);

а



$$S_1 = P; \quad S_2 = 0.$$

б



$$S_3 = P; \quad S_1 = S_2.$$

Рис. 28

- если в узле фермы сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, а вдоль третьего действует внешняя сила, то усилие в нагруженном стержне равно силе, а усилие в двух других стержнях одинаковые (рис. 28, б).

Пример. Дано: $a = 3 \text{ м}$, $h = 4 \text{ м}$, $P_1 = 2 \text{ кН}$, $P_2 = 4 \text{ кН}$, $P_3 = 6 \text{ кН}$.

Определить усилия в стержнях фермы (рис. 29).

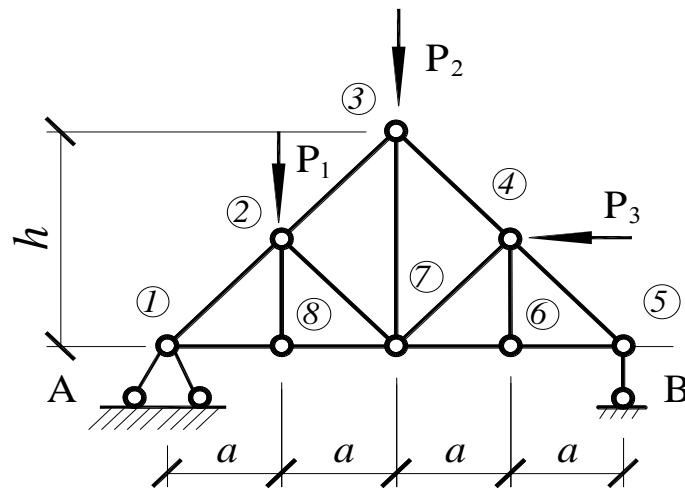


Рис. 29

В ферме число узлов $Y = 8$, число стержней $C_\sigma = 13$. Следовательно, соотношение (35) выполняется, т.е. ферма статически определимая и геометрически неизменяемая (образована жесткими треугольниками).

Для определения опорных реакций от несвободного равновесия перейдем к свободному (рис. 30) и составим уравнения равновесия для фермы в целом.

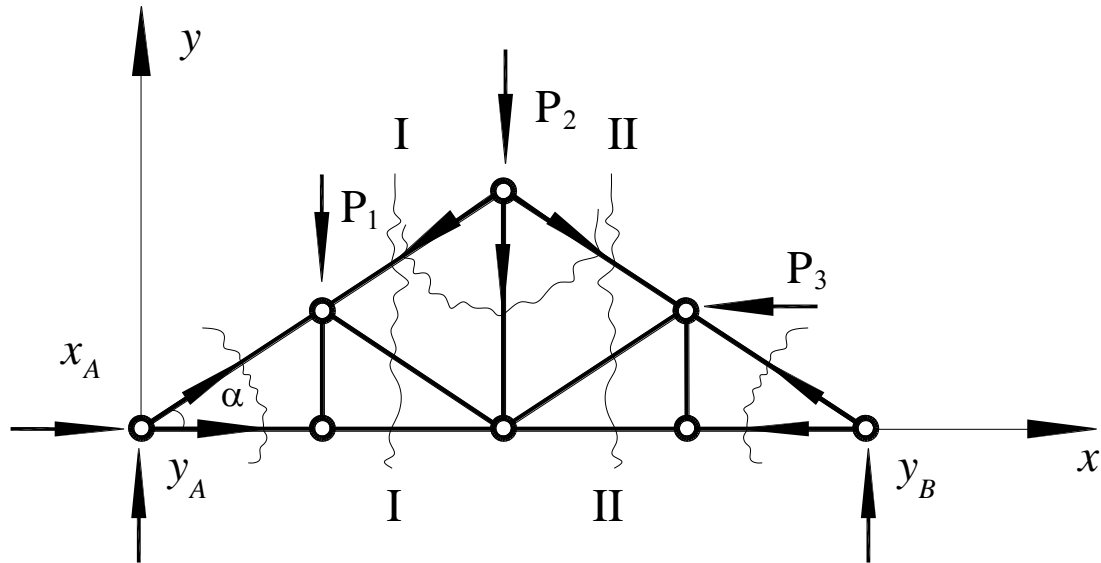


Рис. 30

$$\sum F_{kx} = 0; \quad x_A - P_3 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad y_A + y_B - P_1 - P_2 = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad -P_1 a - P_2 \cdot 2a + P_3 \cdot \frac{h}{2} + y_B \cdot 4a = 0.$$

Решая уравнения, находим:

$$x_A = 6 \text{ kH}; \quad y_A = 4,5 \text{ kH}; \quad y_B = 1,5 \text{ kH}.$$

Для проверки найденных реакций составим уравнение:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad P_3 \cdot \frac{h}{2} + P_2 \cdot 2a + P_1 \cdot 3a - y_A \cdot 4a = 0;$$

$$6 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 9 - 4,5 \cdot 12 = 0; \quad 0 = 0.$$

Переходим к определению усилий в стержнях фермы.

Метод вырезания узлов применим к узлу 1 (нумерация узлов на рис. 29).

Изобразим узел, направляя усилия в стержнях от узла (рис. 31), и составим уравнения равновесия:

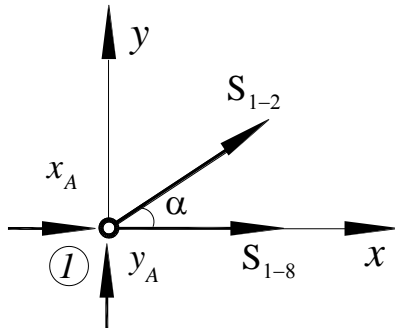


Рис. 31

$$\sum F_{kx} = 0; \quad x_A + S_{1-8} + S_{1-2} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad y_A + S_{1-2} \sin \alpha = 0,$$

получаем

$$S_{1-2} = -8,11 \text{ kH}, \quad S_{1-8} = 0,75 \text{ kH}.$$

Далее рассматриваем равновесие узла 5 (рис. 32):

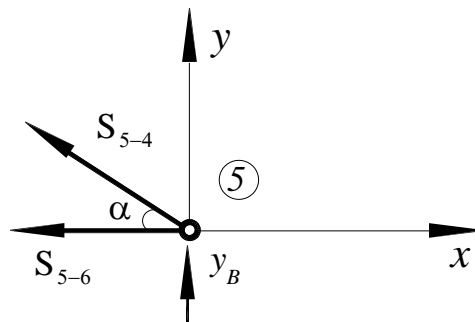


Рис. 32

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$-S_{5-6} - S_{5-4} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$y_B + S_{5-4} \sin \alpha = 0,$$

тогда

$$S_{5-4} = -2,70 \text{ kH},$$

$$S_{5-6} = 2,25 \text{ kH}.$$

В соответствии с первой леммой: в узле 8 усилия $S_{8-2} = 0$, $S_{8-7} = S_{8-1} = 0,75 \text{ kH}$; в узле 6 - $S_{6-4} = 0$, $S_{6-7} = S_{6-5} = 2,25 \text{ kH}$.

Для определения следующих усилий будем использовать метод сечений. Проведем сечение I – I и рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 33).

Для того, чтобы найти усилие S_{2-3} , составим уравнение моментов относительно узла 7, где пересекаются стержни 2 - 7 и 8 - 7.

$$\sum m_7^{\ddot{\cdot}}(\bar{F}_k) = 0; \quad -S_{2-3} \cdot r - y_A \cdot 2a + P_1 \cdot a = 0,$$

где r – плечо усилия S_{2-3} относительно центра 7, $r = 2a \sin \alpha$.

$$\text{Тогда } S_{2-3} = -6,31 \text{ kH}.$$

Для усилия S_{2-7} точка Риттера лежит в узле 1, где пересекаются стержни 2 - 3 и 8 - 7. Запишем уравнение:

$$\sum m_1^{\ddot{\cdot}}(\bar{F}_k) = 0, \quad -S_{2-7} \cdot r - P_1 \cdot a = 0,$$

из которого $S_{2-7} = -1,80 \text{ kH}$.

Проверим правильность определения S_{8-7} из выражения:

$$\sum m_2^{\ddot{\cdot}}(\bar{F}_k) = 0, \quad S_{8-7} \cdot \frac{h}{2} + x_A \cdot \frac{h}{2} - y_A \cdot a = 0,$$

$S_{8-7} = 0,75 \text{ kH}$, что совпадает с результатом счета методом вырезания узлов.

Сечением II – II разделим ферму на две части и рассмотрим равновесие правой части (рис. 34).

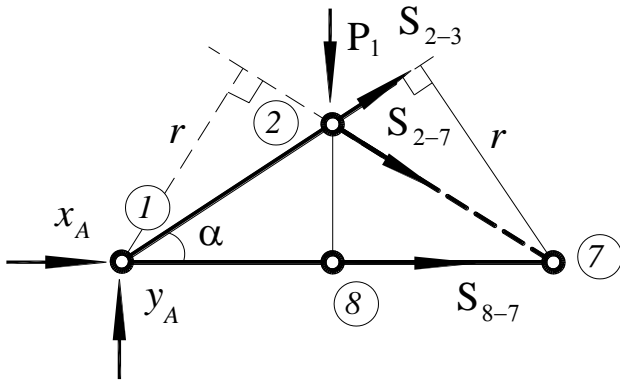


Рис. 33

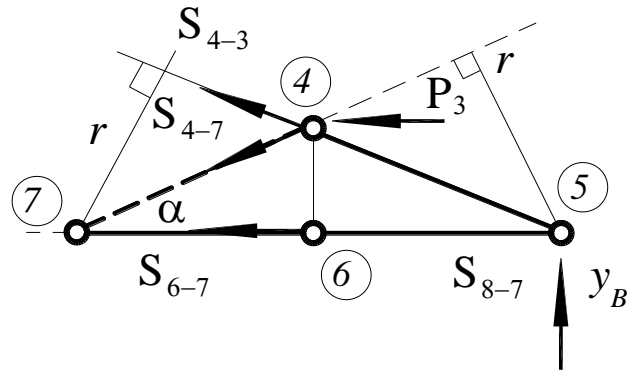


Рис. 34

Моментная точка для усилия S_{4-3} лежит в узле 7, где пересекаются стержни 4 – 7 и 7 – 6. Запишем уравнение равновесия:

$$\sum m_7^{\ddot{\cdot}}(\bar{F}_k) = 0; \quad S_{4-7} \cdot r + P_3 \cdot \frac{h}{2} = 0,$$

находим $S_{4-7} = -3,61 \text{ kH}$.

Чтобы вычислить значение S_{3-7} , применим способ вырезания узлов. Рассмотрим равновесие узла 3 (рис. 35), в котором неизвестным является только усилие S_{3-7} .

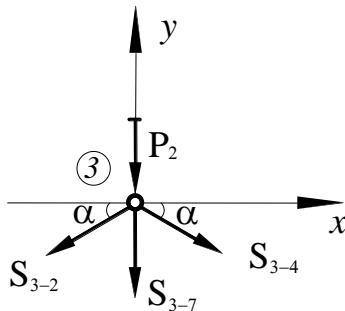


Рис. 35

$$\sum F_{kx} = 0; \quad -S_{3-2} \cos \alpha + S_{3-4} \cos \alpha = 0;$$

$$0=0.$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-P_2 - S_{3-7} - S_{3-2} \sin \alpha - S_{3-4} \sin \alpha = 0,$$

$$S_{3-7} = 3,0 \text{ kH}.$$

Выполнение условий равновесия узла 7 служат проверкой выполненных расчетов (рис. 36).

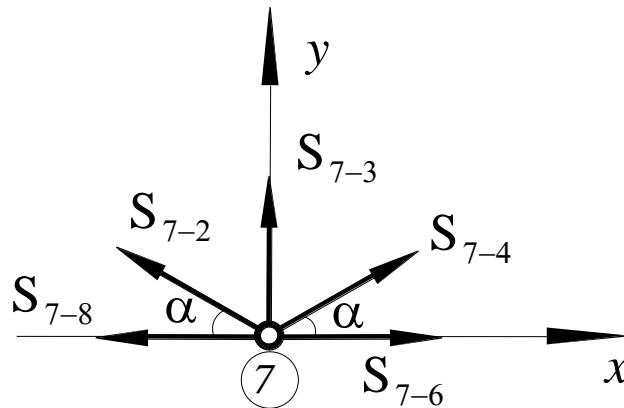


Рис. 36

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$-S_{7-8} - S_{7-2} \cos \alpha + S_{7-4} \cos \alpha + S_{7-6} = 0;$$

$$-0,75 - (1,8) \cdot 0,832 + (-3,61) \cdot 0,832 + 2,25 = 0; \quad 0=0.$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$S_{7-3} + S_{7-2} \sin \alpha + S_{7-4} \sin \alpha = 0;$$

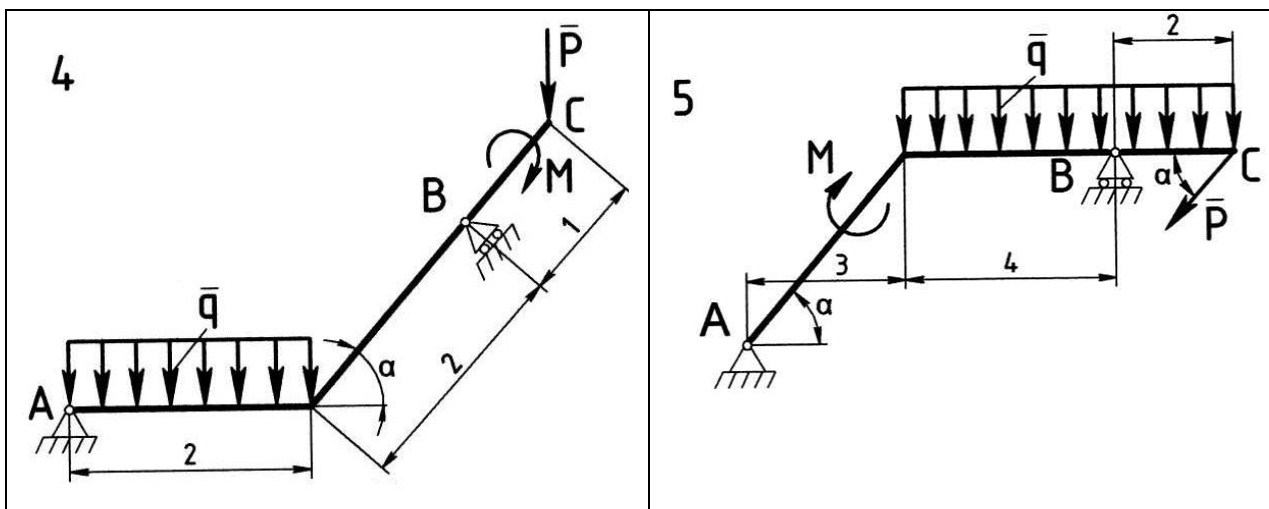
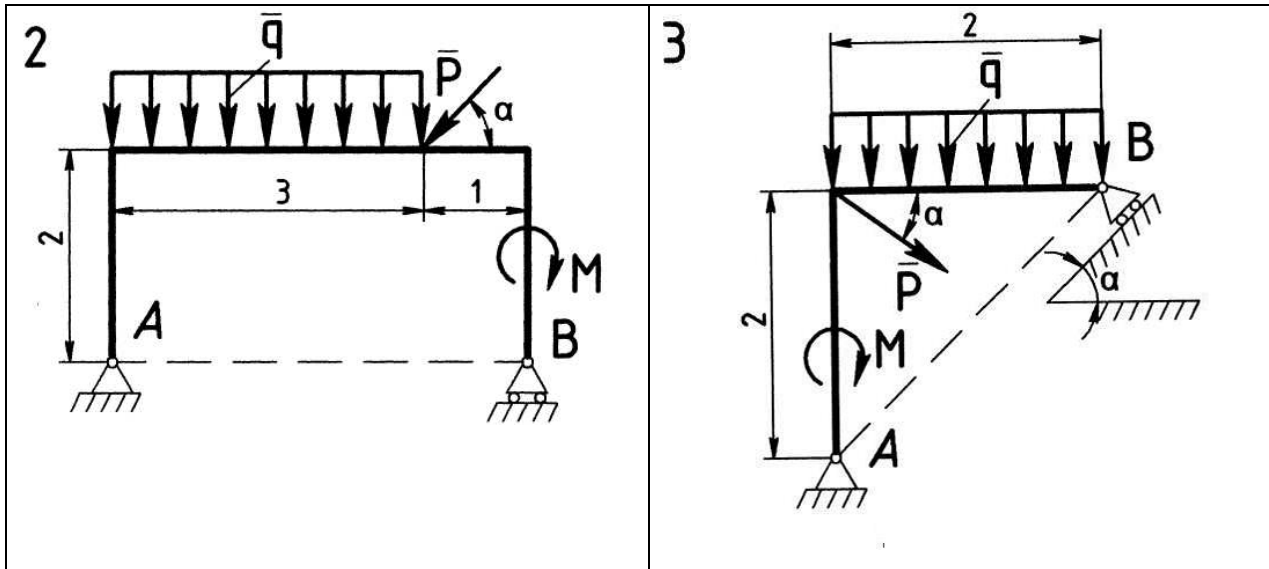
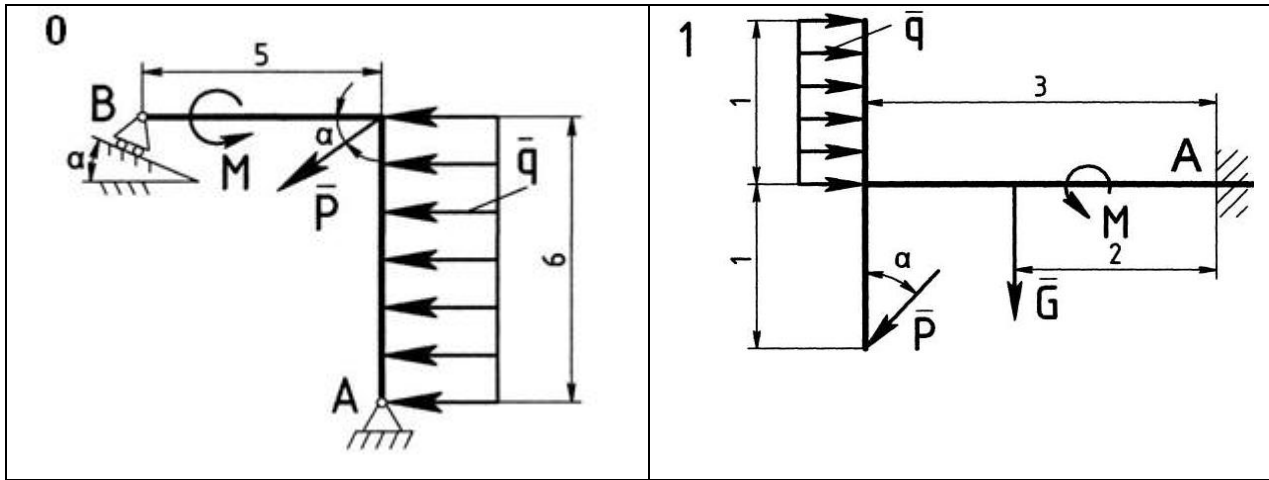
$$3,0 - 1,8 \cdot 0,555 - 3,61 \cdot 0,555 = 0; \quad 0=0.$$

6. Расчетно-графические задания

6.1. Определение реакций опор жесткой рамы

Плоская изогнутая рама находится в равновесии под действием сосредоточенной силы P , равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , пары сил с моментом M . Требуется определить реакции связей, сделать проверку решения задачи

Схема конструкции соответствуют 1-й цифре шифра, нагрузка указана в табл.2 и выбирается по 2-й цифре шифра.



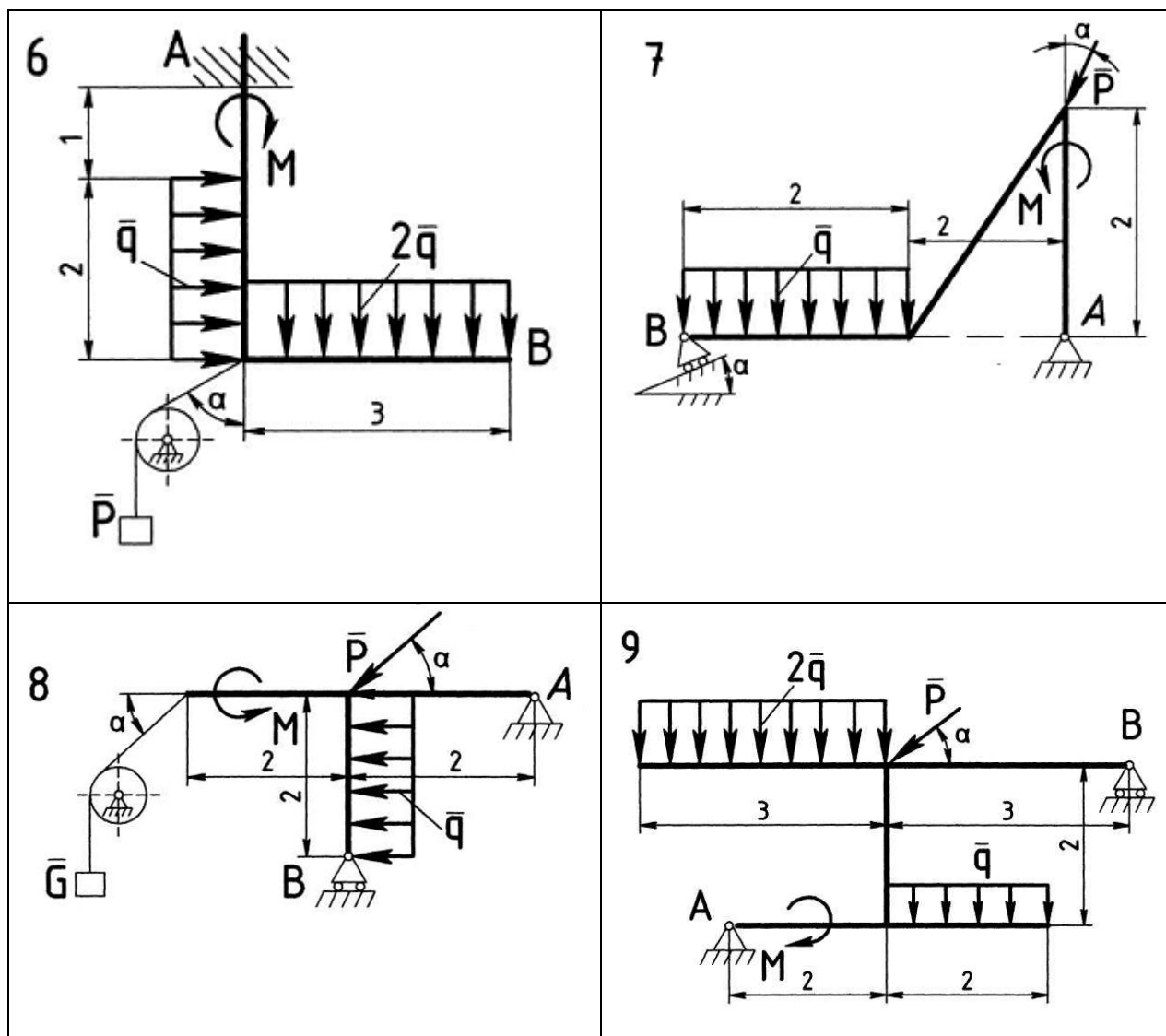


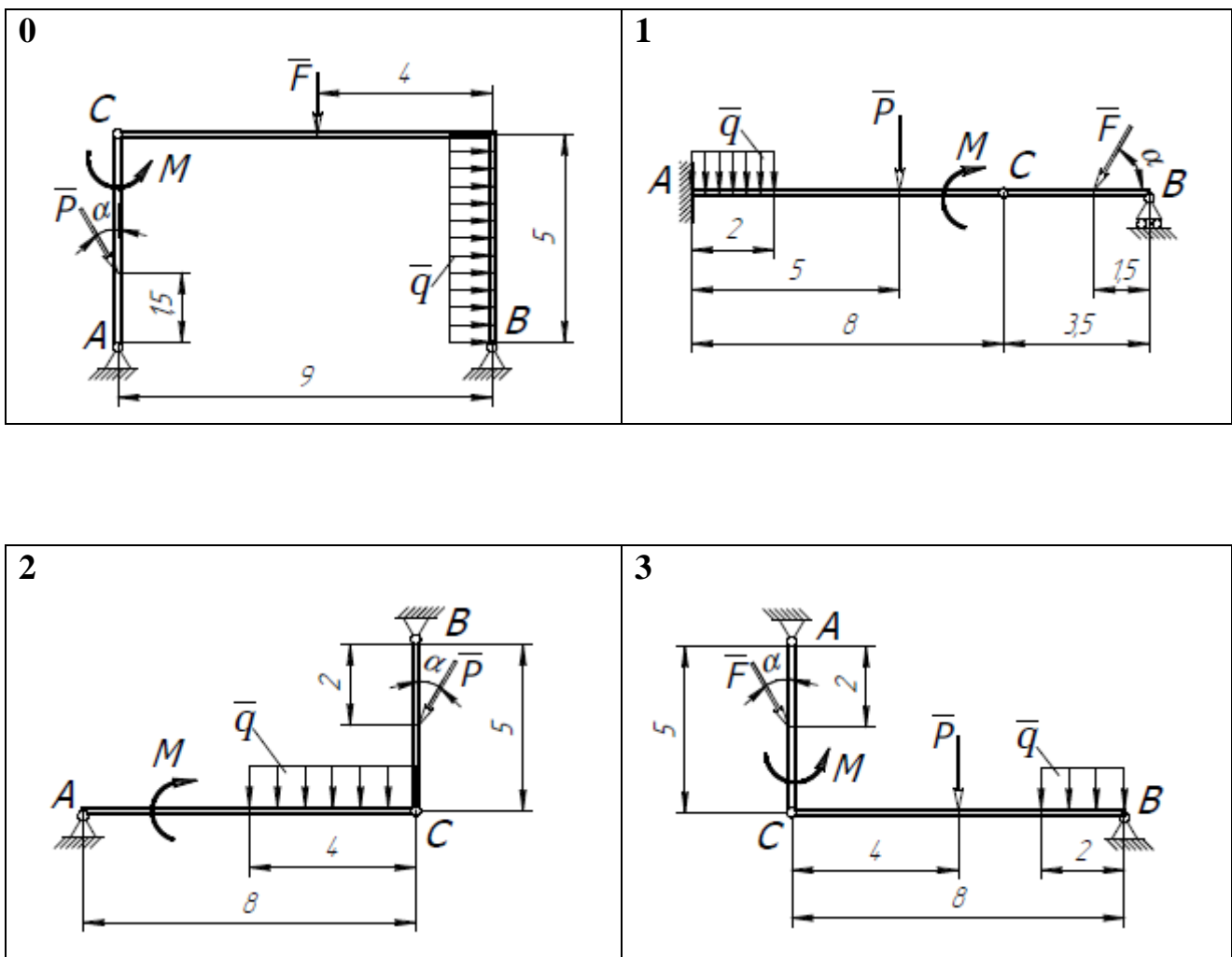
Таблица 2

Номер варианта	$P, (H)$	$M, (H \cdot m)$	$q, (H/m)$	$\alpha, (град)$
0	20	10	4	30
1	15	12	3	45
2	36	7	6	30
3	10	8	2	60
4	16	32	5	45
5	17	5	2	60
6	10	26	2	30
7	34	25	1	60
8	14	20	0,5	30
9	52	14	7	60

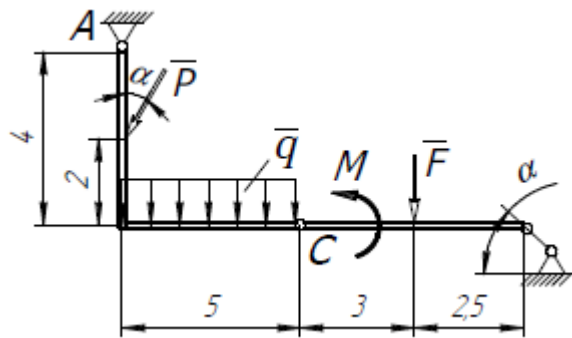
6.2. Определение реакций опор составной конструкции

Конструкция, состоящая из двух тел (АС и СВ), которые связаны между собой шарниром С, под действием сил F , P , момента пары M и равномерно распределенной нагрузки интенсивности q , находится в равновесии. Определить реакции в опорах и давление в шарнире С, возникающие под действием заданных нагрузок, сделать проверку решения задачи.

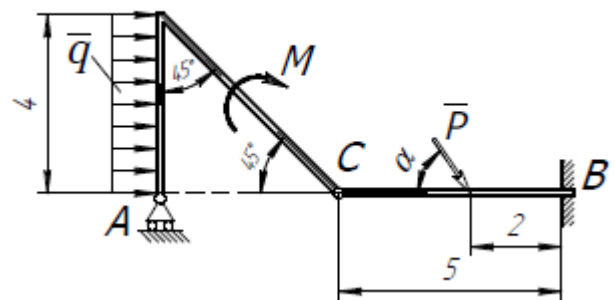
Схема конструкции соответствуют 1-й цифре шифра, нагрузка указана в табл.3 и выбирается по 2-й цифре шифра.



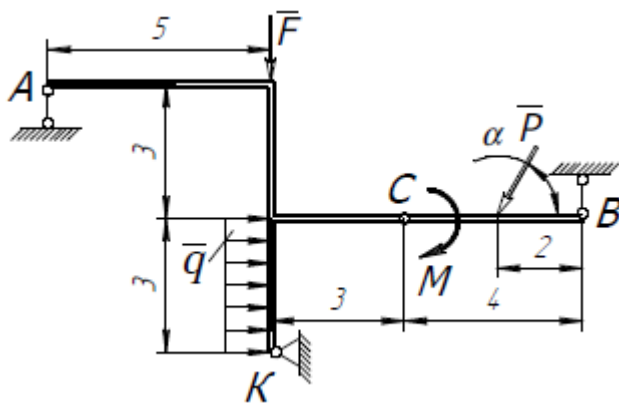
4



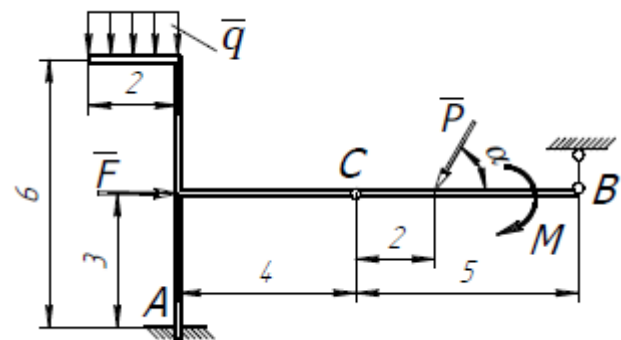
5



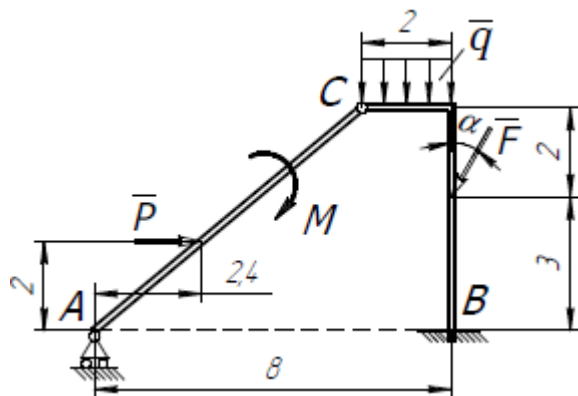
6



7



8



9

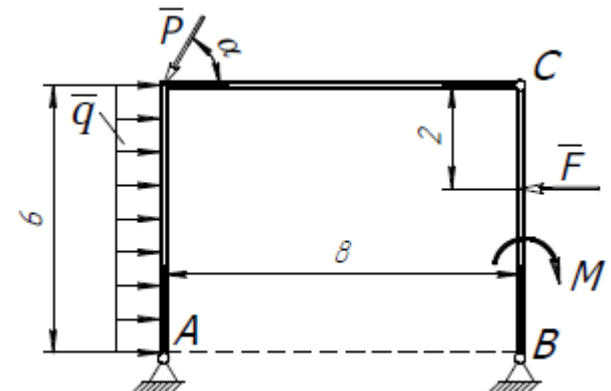


Таблица 3

№ Вар.	№ Схемы	F , кН	P , кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град.
1	1	22	8	16	1,8	45
2		20	12	18	5	60
3		25	10	12	1	45
4	2	26	9	10	3	45
5		28	23	15	1,2	30
6		26	11	16	1,8	60
7	3	--	15	18	4	60
8		--	16	12	2	45
9		--	19	10	3	30
10	4	26	23	15	1,4	30
11		22	8	16	4,5	45
12		20	12	18	4	60
13	5	25	10	12	1,7	45
14		26	19	10	3	45
15		28	23	15	2	30
16	6	--	9	17	1,8	60
17		--	15	18	5	60
18		--	6	19	1	45
19	7	15	19	10	3	30
20		26	23	20	1,2	30
21		23	8	16	1,8	45
22	8	20	12	14	4	60
23		25	10	12	2	45
24		22	9	18	3	45
25	9	28	4	16	1,4	30
26		26	11	16	4,5	60
27		29	15	10	4	60
28	0	22	26	12	1,7	45
29		25	19	10	3	30
30		26	23	20	2	30

6.3. Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы

Для заданной плоской статически определимой фермы требуется:

- а) найти реакции опор фермы от заданной нагрузки;
- б) выделить стержни, усилия в которых определяются по леммам;
- в) определить усилия во всех стержнях фермы способом вырезания узлов;

г) в стержнях заданной панели определить усилия методом Риттера и сравнить со значениями, найденными способом вырезания узлов.

Цифры шифра							
1-я		2-я	3-я		4-я		5-я
№ схемы	d	h	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	№ панели
1	5	6	6	-	8	6	2
2	4,5	5	-	5	4	7	3
3	4	6	4	-	6	5	4
4	3	5	-	3	9	4	5
5	4	4	5	-	5	7	2
6	3,5	3	-	4	6	9	3
7	2,5	4,5	2	-	8	4	4
8	3	5	-	6	9	6	5
9	4	3	3	-	5	4	2
0	2,5	3	-	5	6	8	3

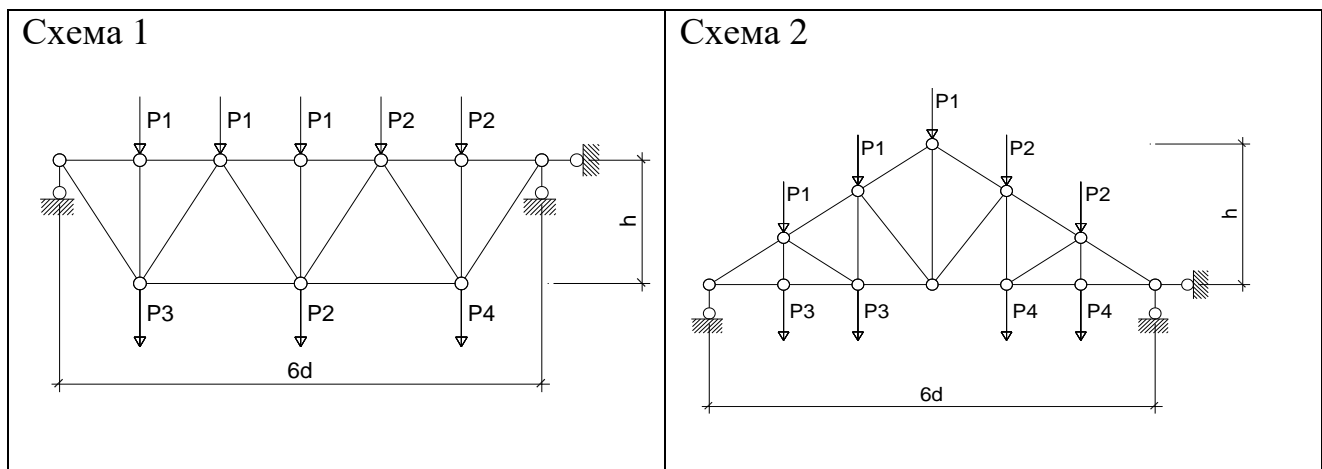


Схема 3

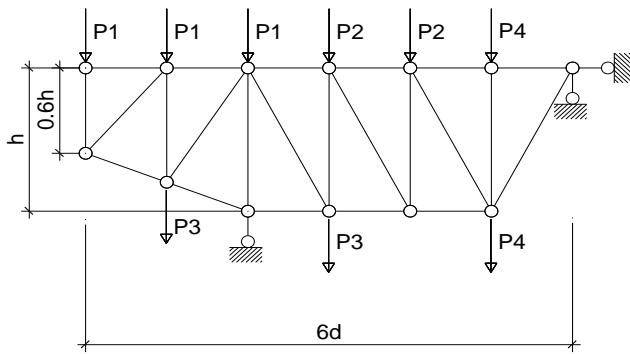


Схема 4

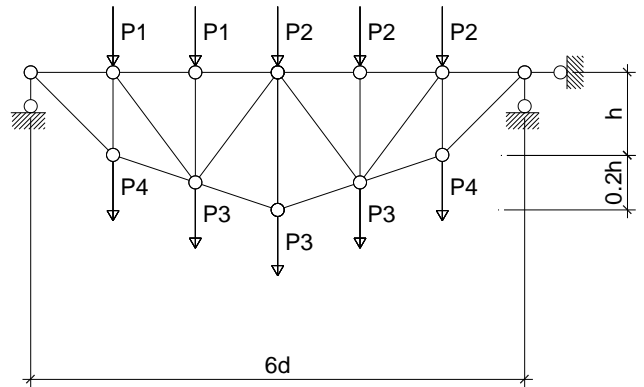


Схема 5

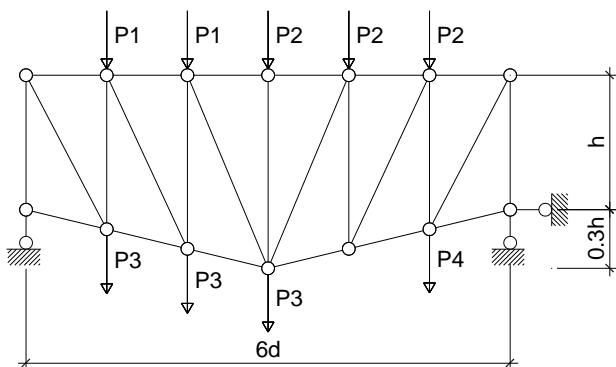


Схема 6

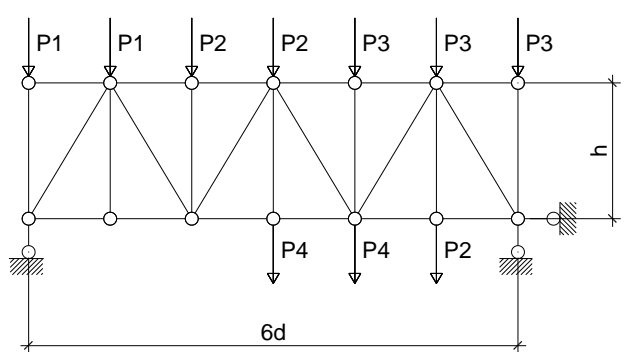


Схема 7

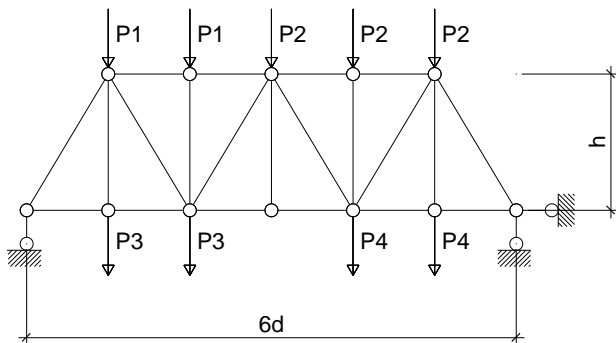


Схема 8

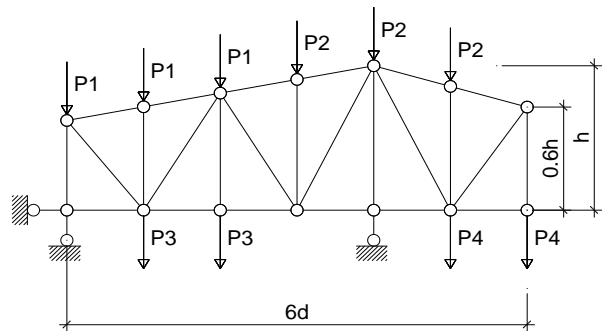


Схема 9

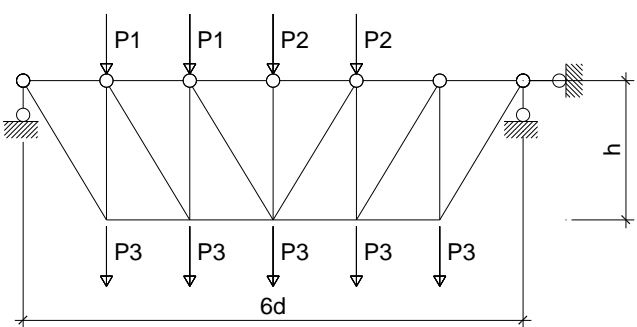


Схема 0

